МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ ЦЕНТР УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ
ХМЕЛЬНИЦЬКОЇ МІСЬКОЇ РАДИ
ХМЕЛЬНИЦЬКИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ БАГАТОПРОФІЛЬНИЙ ЛІЦЕЙ

Л.С. Федорова

Вибранні питання курсу за вибором «Ірраціональність у рівняннях,нерівностях і алгебраїчних виразах». Методичний посібник.

м.Хмельницький
2014 р.

ДЕПАРТАМЕНТ ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ
ХМЕЛЬНИЦЬКОЇ ОБЛДЕРЖАДМІНІСТРАЦІЇ
ХМЕЛЬНИЦЬКИЙ ОБЛАСНИЙ ІНСТИТУТ ПІСЛЯДИПЛОМНОЇ
ПЕДАГОГИЧНОЇ ОСВІТИ

РОЗГЛЯНУТО	СХВАЛЕНО
Науково-методичною радою управління освіти Хмельницької міської ради	Вченою радою Хмельницького обласного інституту післядипломної педагогічної освіти
Протокол № 4 від 29 вересня 2014р.	Протокол №___від_________2014р.
Завідувач НМЦ ________________	Ректор ХОІППО____________В.Е.Берека

Вибранні питання курсу за вибором «Ірраціональність у рівняннях,нерівностях і алгебраїчних виразах».

Методичний посібник

Автор: Федорова Любов Станіславівна,
вчитель математики
Технологічного багатопрофільного
ліцею імені А.Мазура

м.Хмельницький
2014 р.

РЕЦЕНЗІЯ

на методичний посібник «Вибранні питання курсу за вибором «Ірраціональність у рівняннях, нерівностях і алгебраїчних виразах» старшого вчителя, вчителя вищої категорії Хмельницького багатопрофільного ліцею
ім. А.Мазура Любові Станіславівни Федорової.

Запропонована праця «Вибрані питання курсу за вибором «Ірраціональність у рівняннях, нерівностях і алгебраїчних виразах» пропонує системний підхід до викладання курсів за вибором у класах з поглибленим викладанням математики та класах фізико-математичного профілю.

Важливим є те, що посібник складається як з матеріалів теоретичного, так і практичного спрямування. Слід відмітити чітку класифікацію типів ірраціональних нерівностей та методів їх розв’язання згідно вимог програми з математики на ЗНО. У роботі також подане поурочне планування для вчителів.

Значна увага приділена практичним аспектам застосування курсу. Серед ефективних методів і форм автор перевагу надає самостійній, пошуково-дослідницькій діяльності старшокласників у системі реалізації аспектів профільного навчання.

Методичний посібник пройшов апробацію у 2012-2013 н.р. на базі фізико-математичного профілю Технологічного багатопрофільного ліцею.

Вважаємо, що методичний посібник «Вибрані питання курсу за вибором «Ірраціональність у рівняннях, нерівностях і алгебраїчних виразах» старшого вчителя, вчителя вищої категорії Хмельницького Технологічного багатопрофільного ліцею з загальноосвітніми класами імені А.Мазура Федорової Любові Станіславівни відповідає усім вимогам, що ставляться до науково-методичних робіт такого типу, є доречним і актуальним у шкільному навчально-виховному процесі як один із альтернативних посібників в системі профільного навчання. Творчий підхід, великий досвід і знання автора, науково-методичне розуміння поставної проблеми роблять аналізовану працю актуальною і необхідною для школи, адже запропоновані матеріали знайдуть застосування на уроках профільного навчання.

Рецензенти:

Доцент кафедри прикладної математики
Хмельницького національного університету
кандидат педагогічних наук О.Я. Кучерук

Методист управління освіти Хмельницької
міської ради, вчитель-методист,
вчитель вищої категорії О.П. Щур

Вчитель-методист, вчитель вищої категорії
ліцею №17 м. Хмельницького Л.М. Коцемір

Особистий підпис О.Я. Кучерук засвідчую
Проректор з наукової роботи
Хмельницького національного університету,
доктор технічних наук, професор Г.Б. Параска

«___»____________2014 року

ЗМІСТ

Пояснювальна записка

Реалії сучасної профільної освіти в Україні дають можливість учневі вибирати предмети, які є базовими в подальшому виборі професії.

Мета курсу за вибором О.В.Єріної «Ірраціональність у рівняннях,нерівностях і алгебраїчних виразах» - надати учням можливість глибше опрацювати деякі питання перетворення ірраціональних виразів,стандартних і нестандартних методів розв'язання ірраціональних рівнянь і нерівностей ,у тому числі з параметром.

Особливістю даного курсу є те, що навчання орієнтується на самостійну роботу учнів з літературою. Це сприяє формуванню у них відповідних типів самостійного мислення,здатності самостійно працювати з літературою.

Тема «Ірраціональні нерівності» є однією з найскладніших тем елементарної математики. Даний навчальний посібник містить короткі теоретичні відомості,матеріал для повторення,приклади розв'язання типових вправ.

Посібник містить значну кількість вправ з відповідями,які можуть бути використаними для самостійної роботи учнів класах з поглибленим вивченням математики та класах фізико-математичного профілю.

Програма курсу за вибором «Ірраціональні нерівності»

№ п/п	Зміст навчального матеріалу курсу	К-сть годин
1	Розв'язування нерівностей виду $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$ $\left(\sqrt[2n]{f(x)} \le g(x)\right)$.	1
2	Розв'язування нерівностей виду $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$ $\left(\sqrt[2n]{f(x)} \ge g(x)\right)$.	1
3	Розв'язування нерівностей виду $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x)$ $\left(\sqrt[2n+1]{f(x)} \ge g(x)\right)$, $\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x)$ $\left(\sqrt[2n+1]{f(x)} \le g(x)\right)$, $\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)}$.	3
4	Розв'язування нерівностей виду $\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) \ge 0$ $\left(\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) \le 0\right)$.	2
5	Розв'язування нерівностей виду $\frac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} > 0$ $\left(\frac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} < 0\right)$.	1
6	Розв'язування нерівностей виду $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}$ $\left(\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)}\right)$.	1
7	Графічний метод розв'язування ірраціональних нерівностей.	2
8	Ірраціональні нерівності з модулем.	2
9	Використання властивостей монотонності функції для ірраціональних нерівностей.	2
10	Розв'язування ірраціональних нерівностей, використовуючи метод введення нової змінної.	2
11	Ірраціональні нерівності з параметрами.	3

Урок 1

Тема. Розв'язування нерівностей виду $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$ $\left(\sqrt[2n]{f(x)} \le g(x)\right)$.

Мета. Формувати вміння переходити від даної нерівності до системи алгебраїчних нерівностей і розв'язувати їх.

Короткі теоретичні відомості

Урок слід почати з мотивації навчальної діяльності, а також повторити означення нерівності, що означає «розв'язати нерівність», означення рівносильних нерівностей.

Особливу увагу треба звернути на перетворення, які приводять до рівносильних нерівностей.

✍ **Теорема 1.** Якщо до обох частин нерівності додати одну і ту ж функцію $\varphi(x)$, яка визначена при всіх значеннях х із даної області визначення даної нерівності, і при цьому залишити без зміни знак нерівності, то одержана нерівність рівносильна даній.

Нерівності $f(x) > g(x)$ і $f(x) + \varphi(x) > g(x) + \varphi(x)$ – рівносильні.

✍ **Теорема 2.** Якщо обидві частини нерівності помножити чи поділити на одну і ту ж функцію $\varphi(x)$, яка при всіх значеннях х із області визначення даної нерівності набуває лише додатного значення, і при цьому залишити без зміни знак нерівності, то одержана нерівність рівносильна даній.

Нерівності $f(x) > g(x)$ і $f(x) \cdot \varphi(x) > g(x) \cdot \varphi(x)$ – рівносильні.

✍ **Теорема 3.** Якщо обидві частини нерівності помножити чи поділити на одну і ту ж функцію $\varphi(x)$, яка при всіх значеннях х із області визначення даної нерівності набуває від'ємного значення, і при цьому замінити на протилежний знак нерівності, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

Нерівності $f(x) > g(x)$ і $f(x) \cdot \varphi(x) < g(x) \cdot \varphi(x)$ – рівносильні, якщо $\varphi(x) < 0$.

✍ **Теорема 4.** Нехай дано нерівність $f(x) > g(x)$, причому $f(x) \ge 0$ і $g(x) \ge 0$ при всіх x із області визначення нерівності. Якщо обидві частини нерівності піднести до одного і того ж натурального степеня, то нерівність $\left(f(x)\right)^n > \left(g(x)\right)^n$ – рівносильна даній.

При розв'язуванні ірраціональних нерівностей використовуються ті ж прийоми, що і при розв'язуванні ірраціональних рівнянь: піднесення обох частин нерівності до одного і того ж степеня, введення нових (допоміжних) змінних і т.д.

Здійснювати розв'язання можна дотримуючись, наприклад, слідуючого плану:

1) знайти область визначення даної нерівності;
2) користуючись теоремами про рівносильність нерівностей, розв'язати дану нерівність;
3) відібрати із знайдених розв'язків значення змінної, які належать області визначення заданої нерівності.

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\sqrt{3x-1} < 2$.

Область визначення нерівності: $x \ge \frac{1}{3}$.

Піднесемо обидві частини нерівності до квадрата:

$$3x - 1 < 4,$$
$$3x < 5,$$
$$x < 1\frac{2}{3}.$$

Враховуючи область визначення, $x \in \left[\frac{1}{3}; 1\frac{2}{3}\right)$.

Відповідь: $\left[\frac{1}{3}; 1\frac{2}{3}\right)$.

Розглянемо нерівність виду $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$.

1) Якщо $g(x) \le 0$, то нерівність не має розв'язків.

2) Якщо $g(x) > 0$, то маємо можливість піднести обидві частини нерівності до степеня 2n. Отже, нерівність $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$ рівносильна системі раціональних нерівностей:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^{2n}. \end{cases}$$

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\sqrt{2x+9} < 3-x$.

$$\begin{cases} 3-x > 0, \\ 2x+9 \geq 0, \\ 2x+9 < 9-6x+x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x > 0, \\ 2x+9 \geq 0, \\ x^2-8x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x \geq -4{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ x > 8. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -4{,}5 \leq x < 0.$$

Відповідь: $x \in [-4{,}5;0)$.

Приклади, які можуть бути використані для організації самостійної роботи учнів.

Розв'язати нерівність:

1. $\sqrt{5x-4} < x.$

   Відповідь: $[0{,}8;1) \cup (4;\infty)$.

2. $\sqrt{x^2-3x-4} < x-2.$

   Відповідь: $[4;8]$.

3. $\sqrt{x-3} < 5-x.$

   Відповідь: $[3;5)$.

4. $\sqrt{x} \leq 4.$

   Відповідь: $[0;16]$.

5. $\sqrt{x^2-x-12} < x.$

   Відповідь: $[4;\infty)$.

6. $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-x.$

Відповідь: $\left(-\infty;-2\right]\cup\left[5;5\frac{9}{13}\right)$.

7. $\sqrt{3x-x^2}<4-x$.

Відповідь: $\left[0{,}8;1\right)\cup\left(4;\infty\right)$.

8. $\sqrt{x+2}<x+\frac{1}{2}$.

Відповідь: $\left(\frac{\sqrt{7}}{2};\infty\right)$.

9. $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}<\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$.

Відповідь: $\left(1;2\sqrt{3}\right]$.

10. $\sqrt{x^2+4x+4}<x+6$.

Відповідь: $\left(-4;\infty\right)$.

11. $\sqrt{x^2-6x+9}\le\frac{6-x}{2}$.

Відповідь: $\left[0{,}8;1\right)\cup\left(4;\infty\right)$.

12. $\sqrt{(x+2)(x-5)}<8-x$.

Відповідь: $\left(-\infty;-2\right]\cup\left[5;5\frac{13}{19}\right)$.

Урок 2

Тема. Розв'язування нерівностей виду $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$ $\left(\sqrt[2n]{f(x)} \geq g(x)\right)$.

Мета. Формувати вміння переходити від даної нерівності до сукупності двох систем раціональних нерівностей і розв'язувати їх.

Короткі теоретичні відомості

Розглянемо нерівність $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$. Ліва частина цієї нерівності невід'ємна. Якщо права частина при всіх х з області визначення набуває таких самих значень, то піднесемо обидві частини нерівності до степеня 2n. Усі ці значення змінної х знаходимо із системи:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) > \left(g(x)\right)^{2n}. \end{cases}$$

Нерівність $f(x) \geq 0$ можна виключити, оскільки решта двох гарантують виконання цієї умови.

Якщо змінна х набуває таких значень з області визначення, при яких $g(x) < 0$, то всі ці значення змінної будуть розв'язками даної нерівності, за умови, що вони входять до області визначення ($f(x) \geq 0$). Усі ці значення змінної знаходяться із системи:

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Отже, нерівність $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$ рівносильна сукупності двох систем раціональних нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > \left(g(x)\right)^{2n}; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$.

$$\sqrt{x^2-4x} > x-3 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3 \geq 0, \\ \left(\sqrt{x^2-4x}\right)^2 > (x-3)^2; \end{cases} \\ \begin{cases} x-3 < 0, \\ x^2-4x \geq 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

Із першої системи $x > 4{,}5$, а з другої $x \leq 0$. Отже $x \in (-\infty;0] \cup (4{,}5;\infty)$.

Відповідь: $(-\infty;0] \cup (4{,}5;\infty)$.

Приклади, які можуть бути використані для організації самостійної роботи учнів.

Розв'язати нерівність:

1. $\sqrt{x+2} > x+\frac{1}{2}.$

   Відповідь: $\left[-2;\frac{\sqrt{7}}{2}\right).$

2. $\sqrt{(x-3)(x+1)} > 3(x+1).$

   Відповідь: $(-\infty;-1).$

3. $\sqrt{x+3} > 9-x.$

   Відповідь: $(6;\infty).$

4. $\sqrt{10+x} > \frac{13+x}{4}.$

   Відповідь: $[-10;-9) \cup (-1;\infty).$

5. $\sqrt{x^2-2x} > 4-x.$

   Відповідь: $\left(2\frac{2}{3};\infty\right).$

6. $3\left(\sqrt{6+x-x^2}\right) > 4x-2.$

   Відповідь: $[-2;2).$

7. $\sqrt{x^2+2x-8} > 2x-5.$

   Відповідь: $(-\infty;-4] \cup \left[2;\frac{11+\sqrt{22}}{3}\right).$

8. $\sqrt{-x^2-2x+3} > x+1.$

Відповідь: $\left[-3;\sqrt{2}-1\right)$.

9. $\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$.

Відповідь: $\left(\frac{2\sqrt{21}}{3};\infty\right)$.

10. $\sqrt{x^2+x} > 1-2x$.

Відповідь: $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6};\infty\right)$.

11. Знайти найменше ціле додатне число x, яке задовольняє нерівність $\sqrt{x^2+16x+64} > 20$.

Відповідь: 13.

Урок 3-5

Тема. Розв'язування нерівностей виду $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x)$ $\left(\sqrt[2n+1]{f(x)} \geq g(x)\right)$, $\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x)$ $\left(\sqrt[2n+1]{f(x)} \leq g(x)\right)$, $\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)}$.

Мета. Формувати вміння розв'язувати вищевказані нерівності, визначивши відповідний алгоритм розв'язування даних нерівностей.

Короткі теоретичні відомості

Слід звернути увагу на те, що піднесення обох частин нерівності до непарного степеня із збереженням знака нерівності завжди є рівносильним перетворенням.

Отже, нерівність виду $\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee g(x)$, де n – деяке натуральне число, а символ $\vee$ позначає один із знаків <, >, ≤, ≥, рівносильна нерівності $f(x) \vee \left(g(x)\right)^{n+1}$.

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{2-x} > x$.

$$\sqrt[3]{2-x} > x \quad \Leftrightarrow \quad 2-x > x^3 \quad \Leftrightarrow \quad -x^3 - x + 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + x - 2 > 0.$$

$x = 1$ – корінь рівняння. Якщо $x < 1$, то $x^3 + x - 2 < 0$.

Відповідь. $x \in (-\infty; 1)$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x - 5} > x - 2$.

Ця нерівність рівносильна нерівності $x^3 - 3x^2 + 2x - 5 > (x-2)^3$.

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 5 > x^3 - 6x^2 + 12x - 8;$$

$$3x^2 - 10x + 3 > 0;$$

$$\frac{D}{4} = 25 - 9 = 16:$$

$$x_1 = 3; x_2 = \frac{1}{3}.$$

Множина розв'язків нерівності: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (3; \infty)$.

Відповідь. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (3; \infty)$

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{x-2} - \sqrt{x-1} > -1$.

Область визначення: $x - 1 \geq 0$, $x \geq 1$.

$$\sqrt[3]{x-2} > \sqrt{x-1} - 1;$$
$$x - 2 > \sqrt{(x-1)^3} - 3(x-1) + 3\sqrt{x-1} - 1;$$
$$x - 2 > (x-1)\sqrt{x-1} - 3x + 3 + 3\sqrt{x-1} - 1;$$
$$x - 2 > x\sqrt{x-1} - \sqrt{x-1} - 3x + 3 + 3\sqrt{x-1} - 1;$$
$$4x - 4 > x\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-1};$$
$$4x - 4 > (x+2)\sqrt{x-1}.$$

При $x \geq 1$ обидві частини нерівності невід'ємні, тому дана нерівність рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} 4x - 4 > 0, \\ x \geq 1, \\ (4x-4)^2 > (x+2)^2(x-1); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ 16 > x^2 + 4x + 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x^2 + 4x - 12 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ -6 < x < 2. \end{cases}$$

Відповідь. $x \in (1;2)$.

Приклади, які можуть бути використані для організації самостійної роботи учнів.

1. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\sqrt[3]{x^3 + 4x^2 - 36} < x$.

   Відповідь. -2.

2. Знайти найменший натуральний розв'язок нерівності $\sqrt[5]{x^5 + x^2 - 4} > x$.

   Відповідь. 3.

3. Знайти найбільший розв'язок нерівності $\sqrt[3]{x-3}\sqrt[5]{5-x} \geq 0$.

   Відповідь. 5.

4. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{x-1} < \sqrt{x+2} + 2$.

5. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{1+x} < 1 + \frac{x}{3}$.

   Відповідь. $(-9;0) \cup (0;\infty)$.

Урок 6-7

Тема. Розв'язування нерівностей виду $\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) \geq 0$ $\left(\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) \leq 0\right)$.

Мета. Формувати вміння розв'язувати дані нерівності, творчо підійшовши до визначення відповідного алгоритму розв'язання.

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Розв'язати нерівність $(x-12)\sqrt{x-3} \leq 0$.

$\sqrt{x-3} \geq 0$ при $x \geq 3$. Тому нерівність виконується при $x-12 \leq 0$. Одержуємо:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 3, \\ x \leq 12; \end{cases} \\ x-3=0; \end{array}\right.$$

Відповідь. $[3;12]$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $(x-1)\sqrt{x^2-x-12} \geq 0$.

$\sqrt{x^2-x-12} \geq 0$ на всій області визначення, тобто при $x \in (-\infty;-3] \cup [4;\infty)$. Тому нерівність виконується при $x-1 \geq 0$ або $\sqrt{x^2-x-12}=0$. Одержимо: $x \in \{-1\} \cup [4;\infty)$.

Відповідь. $\{-1\} \cup [4;\infty)$

Приклад 3. Розв'язати нерівність $(x^2-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$.

Область визначення: $x^2-x-2 \geq 0$, $x \in (-\infty;1] \cup [2;\infty)$.

$\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$ при будь-якому х з області визначення нерівності. Отже, розв'яжемо нерівність $x^2-1 \geq 0$. Одержимо $x \in (-\infty;-1] \cup [1;\infty)$. Для остаточного результату знаходимо переріз одержаних множин.

Відповідь. $(-\infty;-1] \cup [2;\infty)$

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\sqrt{-x}(x+1) > 0$.

Область визначення даної нерівності: $-x \geq 0$, то $x \leq 0$.

$x=0$ – не розв'язок даної нерівності. Поділимо обидві частини нерівності на $\sqrt{-x}$, одержимо нерівність, рівносильну даній:

$$x+1>0;$$
$$x>-1.$$

Враховуючи область визначення і те, що $x=0$ не розв’язок даної нерівності, $x\in(-1;0)$.

Відповідь. $(-1;0)$.

Приклади, які можуть бути використані для організації самостійної роботи учнів.

Розв’язати нерівність:

1. $(x^2-1)\sqrt{x^2-4x+3}\ge 0.$

   Відповідь. $(-\infty;-1]\cup\{1\}\cup[3;\infty).$

2. $(2x+3)\sqrt{6+x-x^2}\ge 0.$

   Відповідь. $\{-2\}\cup[-1{,}5;3].$

3. $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\ge 0.$

   Відповідь. $\{-1\}\cup[2;\infty).$

4. $(x^2-4)\sqrt{x^2-2x-3}\ge 0.$

   Відповідь. $\{-1\}\cup\{3\}\cup[4;\infty).$

5. $(x-3)(x-5)\sqrt{x^2-10x+24}\le 0.$

   Відповідь. $[3;4]\cup\{6\}.$

6. $(x-1)(x-2)^4(x-5)\sqrt{(2x-3)(x-3)(x-6)}\ge 0.$

   Відповідь. $\{1{,}5\}\cup\{2\}\cup\{3\}[6;\infty).$

Знайти найменший цілий розв’язок нерівності.

7. $(x+1)\sqrt{16-x^4}\ge 0.$

   Відповідь. -2.

Знайти найменший натуральний розв’язок нерівності.

8. $(x^2-4)\sqrt{x-1}\ge 0.$

   Відповідь. 2.

Знайти середнє арифметичне розв’язків нерівності.

9. $(x^2-4)\sqrt{x-1}\le 0.$

   Відповідь. 1,5.

Урок 8

Тема. Розв'язування нерівностей виду $\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} > 0$ $\left(\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} < 0\right)$.

Мета. З'ясувати, що нерівності $\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} > 0$ і $\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) > 0$ еквівалентні;

формувати навички розв'язування нерівностей $\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} > 0$ $\left(\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} < 0\right)$, використовуючи алгоритм розв'язування нерівності $\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) > 0$ $\left(\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) < 0\right)$.

Короткі теоретичні відомості

✍ **Теорема.** Нерівності $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} > 0$ (1) і $f(x) \cdot \varphi(x) > 0$ (2) рівносильні.

Якщо число x_0 задовольняє нерівність (1), тобто, якщо $\dfrac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} > 0$, то $f(x_0)$ і $\varphi(x_0)$ або обидві додатні, або обидві від'ємні, а, значить, в кожному з цих випадків $f(x_0) \cdot \varphi(x_0) > 0$, тобто число x_0 задовольняє і нерівність (2).

Аналогічно можна довести рівносильність нерівностей $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} < 0$ і $f(x) \cdot \varphi(x) < 0$.

Далі повторюємо алгоритм розв'язування нерівностей $\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) > 0$ і $\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) < 0$ (див. уроки 6-7).

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}} < 0$.

$$\begin{cases} x-7<0, \\ 4x^2-19x+12>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<7, \\ \left[\begin{array}{l} x>4, \\ x<\dfrac{3}{4}; \end{array}\right. \end{cases}$$

Відповідь. $\left(-\infty;\frac{3}{4}\right)\cup(4;7)$.

Приклади, які можуть бути використані для організації самостійної роботи учнів.

Знайти найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності.

1. $\frac{\sqrt{2x^2+5x-7}}{x+6}>0.$

   Відповідь. -4.

Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності.

2. $\frac{\sqrt{x-2}-2}{x}<0.$

   Відповідь. 2.

Знайти найбільший розв'язок нерівності.

3. $\frac{\sqrt{-x+11}}{x+3}\le 0.$

   Відповідь. 11.

Розв'язати нерівність.

4. $\frac{x^2-13x+40}{\sqrt{19-x^2-78}}\le 0.$

   Відповідь. $(6;8]$.

5. $\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}>0.$

   Відповідь. $(-3;1)$.

6. $\frac{\sqrt{2x^2+15x-17}}{10-x}\ge 0.$

   Відповідь. $\left(-\infty;-\frac{17}{2}\right]\cup[1;10]$.

Урок 9

Тема. Розв'язування нерівностей виду $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}$ $\left(\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)}\right)$.

Мета. Формувати вміння розв'язувати вищевказані нерівності, замінивши їх рівносильною системою нерівностей.

Короткі теоретичні відомості

Щоб розв'язати нерівність виду $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}$, треба замінити рівносильною їй системою:

$$\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+1} > \sqrt{3-x}$.

$$\begin{cases} x+1 > 0, \\ 3-x \ge 0, \\ x+1 > 3-x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x \le 3, \\ x > 1. \end{cases}$$

Відповідь. $(1;3]$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\sqrt{2+\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x}$.

$$\begin{cases} 2+\sqrt{3+x} \ge 0, \\ 3+x \ge 0, \\ 4+x > 0, \\ 2+\sqrt{3+x} < 4+x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3+x} \ge -2, \\ x \ge -3, \\ x > -4, \\ \sqrt{3+x} < 2+x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3, \\ x > -2, \\ 3+x < 4+4x+x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x^2+3x+1; \end{cases}$$

Тому $x \in \left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2};\infty\right)$.

Відповідь. $\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2};\infty\right)$

Приклади, які можуть бути використані для організації самостійної роботи учнів.

Розв'язати нерівність:

1. $\sqrt{x+2} > \sqrt{8-x^2}$.

Відповідь. $\left(2;2\sqrt{2}\right]$.

2. $\sqrt{4-\sqrt{1-x}} > \sqrt{2-x}$.

Відповідь. $\left(\dfrac{-5+\sqrt{13}}{2};1\right]$.

3. $\sqrt{x^2-3x-4} < \sqrt{x^2-5x+6}$.

Відповідь. $(-\infty;-1]\cup[4;5]$.

4. $\sqrt{(x-3)(2-x)} < \sqrt{4x^2+12x+11}$.

Відповідь. $[2;3]$.

5. $\sqrt{6-x-x^2} < \sqrt{3x+6}$.

Відповідь. $(0;2]$.

Знайти найменший цілий розв'язок нерівності:

6. $\sqrt{x+4} < \sqrt{x^2+x+3}$.

Відповідь. -4.

7. $\sqrt{5-x} > \sqrt{x+1}$.

Відповідь. -1.

8. $\sqrt{x^2+2x-3} \geq \sqrt{x-3}$.

Відповідь. 3.

Урок 10-11

Тема. Графічний метод розв'язування ірраціональних нерівнос-тей.

Мета. Формувати вміння застосовувати графіки функцій для розв'язування ірраціональних нерівностей.

Короткі теоретичні відомості

Дуже часто при розв'язуванні ірраціональних нерівностей доцільно скористатися графічним методом. Використання графіків перетворює процес розв'язання з формально-арифметичного на науково-геометричний і значно зменшує ймовірність помилок.

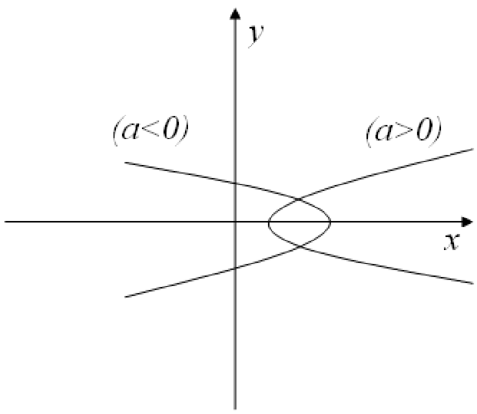
Слід повторити, який вигляд мають графіки відомих функцій.

Далі розглядаємо функцію вигляду $y = \pm\sqrt{ax+b}$. Графік функції $y = \pm\sqrt{ax+b}$ легко одержати із графіка функції $y = \sqrt{x}$ за допомогою відповідних перетворень. Нагадаємо, що:

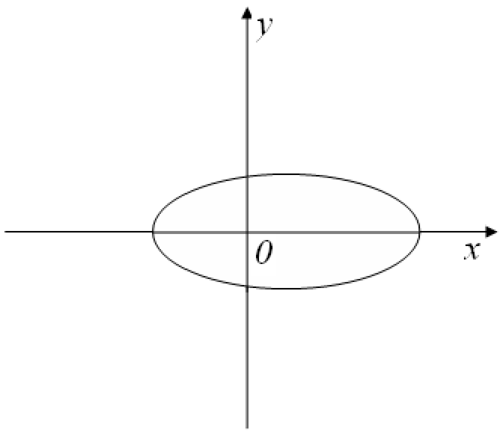
- графік функції $y = -f(x)$ симетричний з графіком функції $y = f(x)$ відносно осі абсцис;
- графік функції $y = f(-x)$ симетричний з графіком функції $y = f(x)$ відносно осі ординат;
- графік функції $y = -f(-x)$ симетричний з графіком функції $y = f(x)$ відносно початку координат;
- графік функції $y = f(x+b)$ одержуємо з графіком функції $y = f(x)$ за допомогою паралельного перенесення останнього вздовж осі абсцис на $|b|$ одиниць масштабу в напрямку, який має знак, протилежний знакові числа b;
- графік функції $y = f(x)+b$ одержуємо з графіком функції $y = f(x)$ за допомогою паралельного перенесення останнього вздовж осі ординат на $|b|$ одиниць масштабу в напрямку, який має знак числа b;

- графік функції $y = f(ax)$ одержуємо з графіком функції $y = f(x)$ стисненням по осі абсцис початкового графіка (якщо a>1, то графік стискається в a разів, якщо $0 < a < 1$, то розтягується в $\frac{1}{a}$ разів);
- графік функції $y = af(x)$ одержуємо з графіком функції $y = f(x)$ за допомогою розтягу цього графіка по осі ординат пропорційно до коефіцієнта a (якщо a>1, то графік розтягується в a разів, якщо $0 < a < 1$, то стискається в $\frac{1}{a}$ разів).

Отже, графік функції $y = \pm\sqrt{ax+b}$ – парабола, її вісь – вісь абсцис, вершина має координати $\left(-\frac{b}{a};0\right)$.

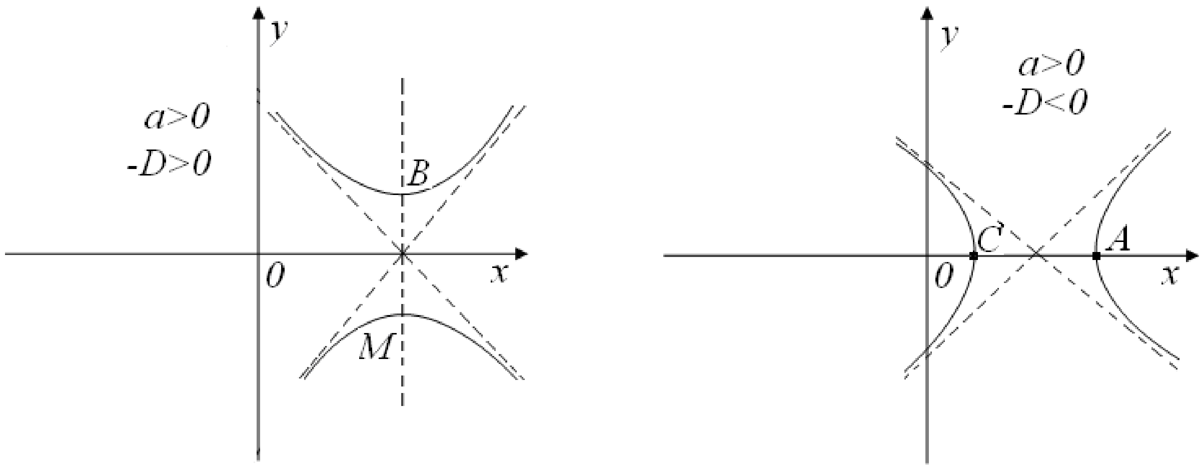


Вигляд графіка функції $y = \pm\sqrt{ax^2+bx+c}$ залежить від знаків a і $-D = 4ac - b^2$. Якщо $a < 0$, і $-D < 0$, то графік функції – еліпс.



Якщо $a>0$, $-D<0$ $\left(-D>0\right)$, то графік – гіпербола. Осі: $y=0$, $x=-\dfrac{b}{2a}$;

вершини: A$\left(\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a};0\right)$, C$\left(\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a};0\right)$, B$\left(-\dfrac{b}{2a};\sqrt{\dfrac{-D}{4a}}\right)$, M$\left(-\dfrac{b}{2a};-\sqrt{\dfrac{-D}{4a}}\right)$. при $a<0$ і $-D>0$ крива не існує в області дійсних значень х.



Ще слід пам'ятати, що область визначення функції $y=\sqrt[2n]{f(x)}$ знаходимо з умови $f(x)\geq 0$. Якщо функція $y=f(x)$ парна, то й дана функція парна. Проміжки зростання (спадання) даної функції в області її визначення збігаються з проміжками зростання (спадання) функції $y=f(x)$.

Для тих значень х, при яких $f(x)=0$ або $f(x)=1$, графіки функції $y=f(x)$ і $y=\sqrt[2n]{f(x)}$ збігаються.

Для тих значень х, при яких $0<f(x)<1$, $\sqrt[2n]{f(x)}>f(x)$, і тому графік функції $y=\sqrt[2n]{f(x)}$ буде розміщений вище від графіка функції $y=f(x)$.

Для тих значень х, при яких $f(x)>1$, $\sqrt[2n]{f(x)}<f(x)$, тому графік функції $y=\sqrt[2n]{f(x)}$ буде розміщений нижче від графіка функції $y=f(x)$.

Вправи для самостійної роботи.

Побудувати графіки функцій:

1) $y=\sqrt{-x^2+x+12}$;

2) $y=\sqrt[4]{2x-x^2}$;

3) $y=\sqrt{x-2}-1$.

Область визначення функції $y=\sqrt[2n+1]{f(x)}$ збігається з областю визначення функції $y=f(x)$.

Проміжки зростання (спадання) функції $y=\sqrt[2n+1]{f(x)}$ збігаються з проміжками зростання (спадання) функції $y=f(x)$.

- якщо функція $y=f(x)$ парна (непарна), то й функція $y=\sqrt[2n+1]{f(x)}$ парна (непарна);
- графіки функцій $y=\sqrt[2n+1]{f(x)}$ і $y=f(x)$ збігаються для тих значень x, для яких $f(x)=0$, $f(x)=\pm 1$;
- для тих значень x, при яких $f(x)<-1$ або $0<f(x)<1$ шуканий графік буде розміщений вище від графіка функції $y=f(x)$, бо $\sqrt[2n+1]{f(x)}>f(x)$;
- для тих значень x, при яких $-1<f(x)<0$ і $f(x)>1$ графік буде розміщений нижче від графіка функції $y=f(x)$, бо $\sqrt[2n+1]{f(x)}<f(x)$.

Вправа для самостійної роботи.

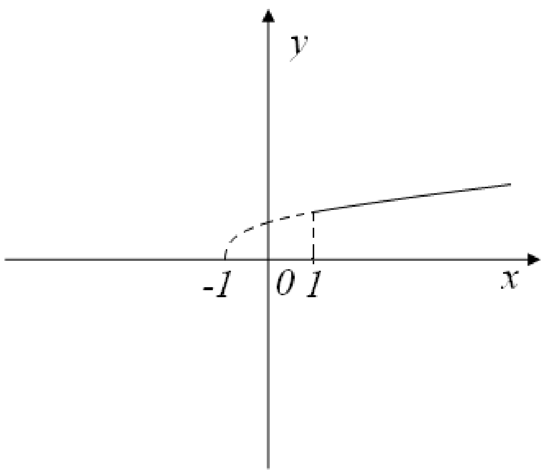
Побудувати графік функції $y=\sqrt[3]{x^2-5x+4}$.

Приклади розв’язування вправ

Приклад 1. Побудувати графік функції $y=\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x-1}$.

1. $D(y)=[1;\infty)$.
2. $y=\sqrt{x-1-2\sqrt{x^2-1}+x+1}+$

   $+\sqrt{x-1}=\left|\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right|+\sqrt{x-1}$.



Якщо $\sqrt{x-1}>\sqrt{x+1}$, то

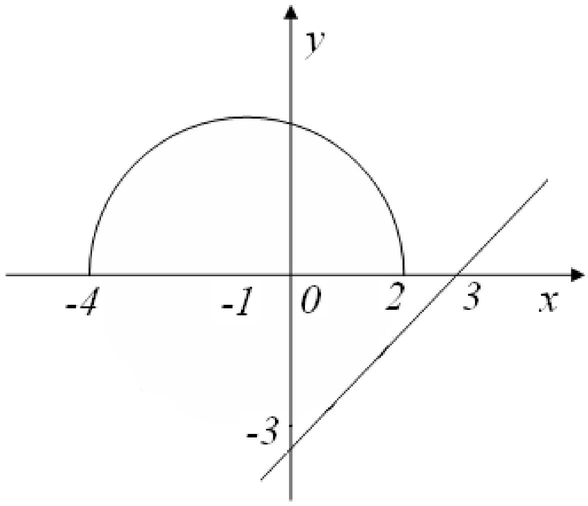
$y=-\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{x+1}$.

3. Будуємо графік функції $y=\sqrt{x+1}$.

Приклад 2. Розв’язати нерівність $3+\sqrt{8-2x-x^2}\geq x$.

$$\sqrt{8-2x-x^2} \ge x-3.$$

Будуємо графіки функцій $f(x)=\sqrt{8-2x-x^2}$ і $g(x)=x-3$. Оскільки $\sqrt{8-2x-x^2}=\sqrt{9-(x+1)^2}$, то графік функції $y=f(x)$ є півколо $(y\ge 0)$ радіуса 3 з центром у точці $(-1;0)$.



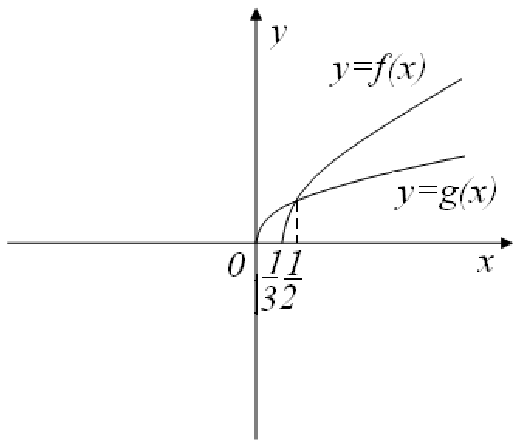
Як видно з малюнка, множина розв'язків нерівності – $[-4;2]$.

Відповідь. $[-4;2]$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\sqrt{3x-1}<\sqrt{x}$.

$f(x)=\sqrt{3x-1}=\sqrt{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}$. Область визначення $x\ge\frac{1}{3}$.

$g(x)=\sqrt{x}$. Область визначення $x\ge 0$.

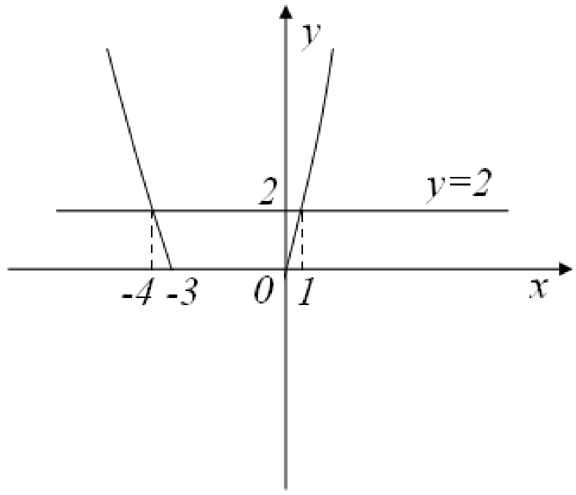


$$\begin{aligned}\sqrt{3x-1}&=\sqrt{x};\\ 3x-1&=x;\\ 2x&=1;\\ x&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Відповідь. $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2+3x}>2$.

Область визначення: $(-\infty;-3]\cup[0;\infty)$.



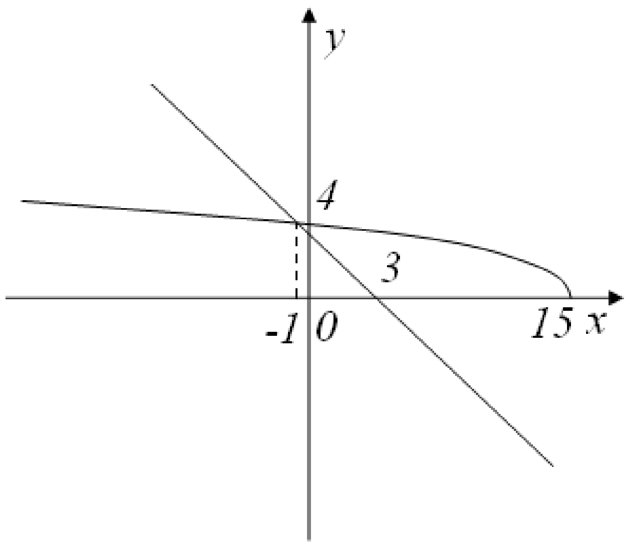
Відповідь. $(-\infty;-4]\cup(1;\infty)$.

Приклад 5. Розв’язати нерівність $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}}<1$.

Область визначення: $x<15$.

При всіх таких значеннях x знаменник дробу додатній і на нього можна помножити обидві частини нерівності, тому $3-x<\sqrt{15-x}$.

Будуємо графіки функцій $f(x)=\sqrt{15-x}$ і $g(x)=3-x$.



Відповідь. $(-1;15)$.

Приклад 6. Розв’язати нерівність $\sqrt{4-x^2}+\frac{|x|}{x}\geq 0$.

$$\sqrt{4-x^2}\geq -\frac{|x|}{x}.$$

$f(x)=\sqrt{4-x^2}$ – півколо радіусом 2 і центром (0;0). $g(x)=-\frac{|x|}{x}$.

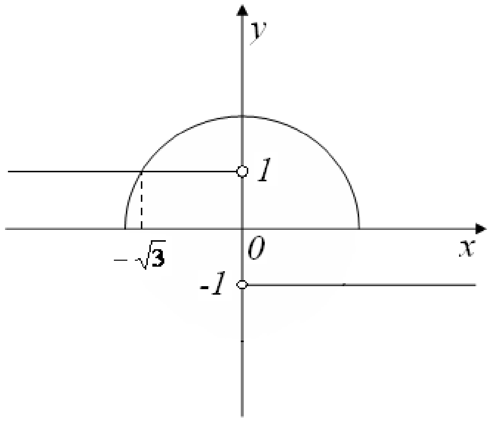
x>0, то $g(x)=-1$, x<0, то $g(x)=1$.

$4-x^2=1;$

$-x^2=-3;$

$x^2=3;$

$x=-\sqrt{3}.$

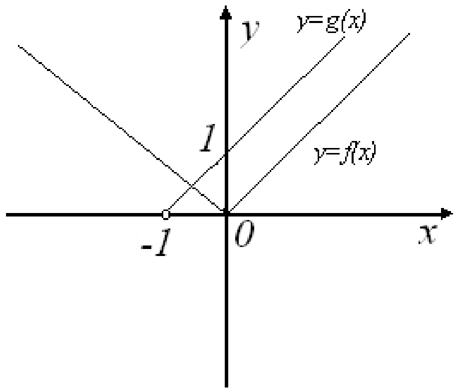


Відповідь. $\left[-\sqrt{3};0\right)\cup\left(0;2\right]$.

Приклад 7. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2}<x+1$.

$f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$.

За умовою $g(x)=x+1>0$, тобто $x>-1$.



Відповідь. $\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$.

Приклади, які можуть бути використані для організації самостійної роботи учнів.

Розв'язати нерівність:

1. $\sqrt{x+2}>x.$

   Відповідь. $\left[-2;2\right)$.

2. $\sqrt{x^2-1}>x.$

   Відповідь. $\left(-\infty;-1\right]$.

3. $x+4>2\sqrt{4-x^2}.$

Відповідь. $[-2;-1,6)\cup(0;2]$.

4. $4-x<\sqrt{2x-x^2}$.

Відповідь. $\varnothing$.

5. $3\sqrt{x}-\sqrt{x+3}>1$.

Відповідь. $(1;\infty)$.

6. $\sqrt{25-x^2}+\frac{3}{4}x\geq 0$.

Відповідь. $[-4;5]$.

7. $2x+7\sqrt{5+4x-x^2}<14$.

Відповідь. $\left[-1;\frac{126-\sqrt{18473}}{53}\right)\cup\left(\frac{126+\sqrt{18473}}{53};5\right]$.

8. $\sqrt{x+4}>2\sqrt{6-x}$.

Відповідь. $(4;6]$.

Урок 12-13

Тема. Ірраціональні нерівності з модулем.

Мета. Формувати навички і вміння досліджувати і розв'язувати ірраціональні нерівності з модулями.

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\sqrt{\left|\frac{1}{4}-x\right|} \geq x+\frac{1}{2}$.

1) Нехай $x+\frac{1}{2}<0$. Нерівність виконується для всіх $x<-\frac{1}{2}$, бо права частина нерівності від'ємна, а ліва – додатна.

2) $x+\frac{1}{2} \geq 0$, тобто $x \geq -\frac{1}{2}$. Значить, $\left|\frac{1}{4}-x\right| \geq x^2+x+\frac{1}{4}$. Якщо $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{4}$, то

$$\frac{1}{4}-x \geq x^2+x+\frac{1}{4};$$
$$x^2+2x \leq 0.$$

Отже,

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ -2 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Звідси $x \in \left[-\frac{1}{2};0\right]$. Якщо $x>\frac{1}{4}$, то

$$x-\frac{1}{4} \geq x^2+x+\frac{1}{4};$$
$$x^2 \leq -\frac{1}{2};$$
$$x \in \varnothing.$$

Відповідь. $(-\infty;0]$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0$.

$$\begin{cases} |x+2|-|x|>0, \\ \sqrt{4-x^3}>0; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x<-2,\\ -x-2-x>0;\end{cases} & \text{розв'язків немає}\\ \begin{cases}-2\le x\le 0,\\ x+2+x>0;\end{cases} & -1<x\le 0\\ \begin{cases}0<x<\sqrt[3]{4},\\ x+2-x>0;\end{cases} & 0<x<\sqrt[3]{4}\end{array}\right.$$

Відповідь. $\left(-1;\sqrt[3]{4}\right)$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\sqrt{2-|x|}<x-1$.

Дана нерівність рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases}2-|x|\ge 0,\\ x-1\ge 0,\\ 2-|x|<(x-1)^2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}-2\le x\le 2,\\ x\ge 1,\\ 2-x<x^2-2x+1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}1\le x\le 2,\\ x^2-x-1>0;\end{cases}$$

$$x\in\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};2\right].$$

Відповідь. $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};2\right]$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\frac{\sqrt{2-x}+x-3}{(|x-3|-3)^2}<0$.

Дана нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases}\sqrt{2-x}+x-3<0,\\ |x-3|-3\ne 0.\end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння $|x-3|=3$.

1) $x-3=3$, x=6;

2) $x-3=-3$, x=0.

Значить, дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} \sqrt{2-x} < 3-x, \\ x \neq 0, x \neq 3; \end{cases}$

$$\begin{cases} 2-x \geq 0, \\ 3-x \geq 0, \\ 2-x < (3-x)^2, \\ x \neq 0, x \neq 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2, \\ x^2 - 5x + 7 > 0, \\ x \neq 0, x \neq 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

Відповідь. $(-\infty;0)\cup(0;2]$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} > 1 - x$.

Виконаємо перетворення: $\sqrt{(x^2-1)^2} = |x^2 - 1|$. Отримуємо нерівність, рівносильну даній: $|x^2 - 1| > 1 - x$. Тому

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 1 > 1 - x, \\ x^2 - 1 < -1 + x; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (x+2)(x-1) > 0, \\ x(x-1) < 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x > 1, \\ 0 < x < 1. \end{array}\right.$$

Відповідь. $(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;\infty)$.

Приклад 6. Розв'язати нерівність $\sqrt{4 - 4x^3 + x^6} > x - \sqrt[3]{2}$

Виконаємо перетворення: $\sqrt{4 - 4x^3 + x^6} = \sqrt{(2-x^3)^2} = \sqrt{(x^3-2)^2} = |x^3 - 2|$. Тому:

$$|x^3 - 2| > x - \sqrt[3]{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} x^3 - 2 > x - \sqrt[3]{2}, \\ x^3 - 2 < -x + \sqrt[3]{2}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (x-\sqrt[3]{2})(x^2 + x\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) > x - \sqrt[3]{2}, \\ (x-\sqrt[3]{2})(x^2 + x\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) < -x + \sqrt[3]{2}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (x-\sqrt[3]{2})(x^2 + x\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - 1) > 0, \\ (x-\sqrt[3]{2})(x^2 + x\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + 1) < 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x - \sqrt[3]{2} > 0, \\ x - \sqrt[3]{2} < 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x > \sqrt[3]{2}, \\ x < \sqrt[3]{2}. \end{array}\right.$$

Відповідь. $\left(-\infty;\sqrt[3]{2}\right)\cup(\sqrt[3]{2}:\infty)$.

Приклад 7. Розв'язати нерівність $\sqrt{2-|x|} < \dfrac{x}{|x|}$.

Якщо x – розв'язок нерівності, то x>0. Тому дана нерівність рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} \sqrt{2-x} < 1, \\ x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \le 2 - x < 1, \\ x > 0. \end{cases}$$

Звідки $1 < x \le 2$.

Відповідь. $(1;2]$.

Приклади, які можуть бути використані для організації самостійної роботи учнів.

Розв'язати нерівність:

1. $\sqrt{2-|x-1|} > x.$

   Відповідь. $\left[-1;\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\right)$.

2. $\sqrt{x^2-|x|} < x.$

   Відповідь. $[1;\infty)$.

3. $\sqrt{2-|x|} > x-1.$

   Відповідь. $\left[-2;\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

4. $\dfrac{|x-2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}} \ge 0.$

   Відповідь. $\left[-1;\sqrt[3]{4}\right)$.

5. $x-\sqrt{1-|x|}<0.$

Відповідь. $\left[-1;\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$

6. $\sqrt{4-x^2}+\dfrac{|x|}{x}\geq 0.$

Відповідь. $\left[-\sqrt{3};0\right)\cup(0;2].$

7. $\sqrt{\left|\dfrac{1}{4}-x\right|}\geq x+\dfrac{1}{2}.$

Відповідь. $(-\infty;0].$

8. $\sqrt{\left|x^2+4x+3\right|}>|x|.$

Відповідь. $\left(-\dfrac{3}{4};\infty\right).$

Урок 14-15

Тема. Використання властивостей монотонності функції для ірраціональних нерівностей.

Мета. Формувати вміння використовувати властивості монотонності функції для розв'язування ірраціональних нерівностей, формувати навики застосування елементів математичного аналізу для розв'язування ірраціональних нерівностей.

Короткі теоретичні відомості

Використання властивостей монотонності для розв'язування ірраціональних нерівностей.

Розв'язати нерівність $\sqrt[4]{15+x}-\sqrt[4]{2-x}>1.$

$$\sqrt[4]{15+x}-\sqrt[4]{2-x}-1>0.$$

Розглянемо функцію $f(x)=\sqrt[4]{15+x}-\sqrt[4]{2-x}-1.$

Область визначення $x\in[-15;2].$

Дослідимо функцію на монотонність.

$$f^{/}(x)=\frac{1}{4\sqrt[4]{(15+x)^3}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{(2-x)^3}}.$$

$$f^{/}(x)>0 \text{ при } x\in(-15;2).$$

Похідна не існує при x=-15 і x=2.

Отже, функція зростає при $x\in(-15;2)$. $f(x)=0$ при x=1.

x=1 – єдине значення аргументу, при якому функція перетворюється в нуль ($f(x)$ зростає) і для всіх $x>1$ в області визначення $f(x)>0$. Отже, $x\in(1;2]$.

У деяких випадках ірраціональні нерівності можна розв'язувати методом інтервалів.

Нагадаємо суть цього методу.

Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на інтервалі $(a;b)$ і не має на ньому нулів, то для всіх $x\in(a;b)$ функція $f(x)$ зберігає свій знак. На цьому твердженні базується загальний метод розв'язування нерівностей – метод інтервалів.

Нехай потрібно розв’язати нерівність $f(x) > 0$ $\left(f(x) < 0\right)$. Для цього:

1) знаходимо область визначення функції $f(x)$;
2) знаходимо нулі функції (розв’язуємо рівняння $f(x) = 0$);
3) нулями функції розбиваємо область визначення $f(x)$ на інтервали знакосталості;
4) встановлюємо знак функції $f(x)$ на кожному інтервалі;
5) записуємо розв’язки нерівності.

Приклади розв’язування вправ

Приклад 1. Розв’язати нерівність $\sqrt{\dfrac{x+5}{2x-1}} > 2$.

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{2x-1}} - 2.$$

Знаходимо область визначення з нерівності $\sqrt{\dfrac{x+5}{2x-1}} > 0$, $x \in (-\infty;-5] \cup \left(\dfrac{1}{2};\infty\right)$

.

Розв’язуємо рівняння $\sqrt{\dfrac{x+5}{2x-1}} = 2$, $x = \dfrac{9}{7}$.

Наносимо відповідні точки на числову вісь і встановлюємо знак функції на кожному з інтервалів.

Отже, $x \in \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{7}\right)$.

Відповідь. $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{7}\right)$

Приклад 2. Розв’язати нерівність $\sqrt[3]{8x+4} - \sqrt[3]{8x-4} < 2$.

$$f(x) = \sqrt[3]{8x+4} - \sqrt[3]{8x-4} - 2.$$

Область визначення $x \in R$.

$$\sqrt[3]{8x+4}=\sqrt[3]{8x-4}+2;$$
$$8x+4=8x-4+6\sqrt[3]{(8x-4)^2}+12\sqrt[3]{8x-4}+8;$$
$$\sqrt[3]{(8x-4)^2}+2\sqrt[3]{8x-4}=0;$$
$$\sqrt[3]{8x-4}\left(\sqrt[3]{8x-4}+2\right)=0;$$

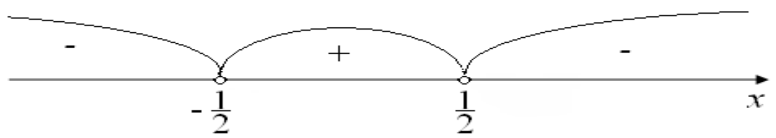
$8x-4=0;$ або $\sqrt[3]{8x-4}=-2;$

$x_1=\frac{1}{2}.$ $\quad 8x-4=-8;$

$8x=-4;$

$x_2=-\frac{1}{2}.$

Знайдені нулі функції розбивають числову вісь на проміжки знакосталості:



Отримуємо: $f(x)<0$ при $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\infty\right).$

Відповідь. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\infty\right).$

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\frac{1-\sqrt{8x-3}}{4x}\geq 1.$

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{8x-3}}{4x}-1.$$

Область визначення:

$$\begin{cases}8x-3\geq 0,\\4x\neq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\frac{3}{8},\\x\neq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\quad x\geq\frac{3}{8}.$$

Знаходимо нулі функції.

$$\frac{1-\sqrt{8x-3}}{4x}-1=0;$$
$$\frac{1-\sqrt{8x-3}-4x}{4x}=0;$$
$$1-4x=\sqrt{8x-3};$$

$$1-8x+16x^2=8x-3;$$
$$16x^2-16x+4=0;$$
$$4x^2-4x+1=0;$$
$$(2x-1)^2=0;$$
$$x=\frac{1}{2}.$$

Це рівняння має єдиний корінь $x=\frac{1}{2}$, який розбиває область визначення на два інтервали $\left[\frac{3}{8};\frac{1}{2}\right)$ і $\left(\frac{1}{2};\infty\right)$. Визначимо знак функції на кожному інтервалі. Взявши, наприклад, $x=\frac{7}{16}$ знаходимо, $f\left(\frac{7}{16}\right)<0$. На другому інтервалі візьмемо $x=1$, отримуємо $f(1)<0$. Таким чином, дана нерівність розв'язків не має.

Відповідь. $\varnothing$.

Приклад 4. Використати елементи математичного аналізу під час розв'язування нерівності $\sqrt{1+x}+\sqrt[4]{1-x}>1$.

Функція $f(x)=\sqrt{1+x}+\sqrt[4]{1-x}$ означена і неперервна на множині $[-1;1]$. $E(f)=\left[\sqrt[4]{2};\sqrt{2}\right]$. Функція $g(x)=1$ має $E(g)=\{1\}$. Порівнюючи $E(f)$ і $E(g)$ робимо висновок: $x\in[-1;1]$ – розв'язок нерівності.

Відповідь. $[-1;1]$

Приклади, які можуть бути використані для організації самостійної роботи учнів.

Розв'язати нерівність:

1. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}>\sqrt[3]{2x-3}$.

   Відповідь. $(1;1,5)\cup(2;\infty)$.

2. $\dfrac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}<1$.

   Відповідь. $\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{3}\right]$.

3. $\dfrac{1-\sqrt{1-9x^2}}{x} \le 1.$

Відповідь. $\left[-\dfrac{1}{3};0\right) \cup \left(0;\dfrac{1}{5}\right].$

4. $\sqrt{5-x} - \sqrt{x-\dfrac{3}{4}} > \dfrac{3}{2}.$

Відповідь. $\left[\dfrac{3}{4};1\right).$

5. $\dfrac{3-x}{\sqrt{15-x}} < 1.$

Відповідь. $(-1;15).$

6. $(|x|-1)\sqrt{-x^2+x+6} \le 0.$

Відповідь. $\{2\} \cup [-1;1] \cup \{3\}.$

7. $(|x|-2)\sqrt{-x^2+2x+3} \ge 0.$

Відповідь. $\{-1\} \cup [2;3].$

8. $\dfrac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2.$

Відповідь. $(-\infty;-4+2\sqrt{5}).$

Урок 16-17

Тема. Розв’язування ірраціональних нерівностей, використовуючи метод введення нової змінної.

Мета. Навчити знаходити необхідну заміну при розв’язуванні ірраціональних нерівностей, які потребують введення нової змінної.

Приклади розв’язування вправ

Приклад 1. Розв’язати нерівність $\frac{2}{x}-\frac{1}{2}>\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{3}{4}}$ (1).

Нехай $t=\frac{2}{x}$, тоді нерівність (1) матиме вигляд: $t-\frac{1}{2}>\sqrt{t^2-\frac{3}{4}}$.

Ця нерівність рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} t-\frac{1}{2}>0, \\ t^2-\frac{3}{4}\geq 0, \\ \left(t-\frac{1}{2}\right)^2>t^2-\frac{3}{4}; \end{cases}$$

Звідси $\frac{\sqrt{3}}{2}\leq t<1$, тому $\frac{\sqrt{3}}{2}\leq\frac{x}{2}<1$, отже $x\in\left(2;\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

Відповідь. $\left(2;\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

Приклад 2. Розв’язати нерівність $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}<2-\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$.

Підносимо обидві частини нерівності до кубу:

$$1+\sqrt{x}<8-12\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}+6\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}-1+\sqrt{x};$$

$$2\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}-\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}-1<0.$$

Позначимо $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=t$, отримуємо $t^2-2t+1>0$, звідки $t\in(-\infty;1)\cup(1;\infty)$.

Враховуючи заміну, матимемо:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}<1, \\ \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}>1. \end{array}\right. \Rightarrow \quad x\in(0;\infty).$$

Відповідь. $(0;\infty)$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{x+5}+2>\sqrt[3]{x-3}$.

Підносимо обидві частини нерівності до кубу:

$$x+5+6\sqrt[3]{(x+5)^2}+12\sqrt[3]{x+5}+8>x-3;$$
$$6\sqrt[3]{(x+5)^2}+12\sqrt[3]{x+5}+16>0.$$

Нехай $\sqrt[3]{x+5}=t$, тоді:

$$6t^2+12t+16>0;$$
$$3t^2+6t+8>0.$$

Отже, $t\in(-\infty;\infty)$, значить $x\in(-\infty;\infty)$.

Відповідь. $(-\infty;\infty)$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{(3+x)^2}+4\sqrt[3]{(3-x)^2}>5\sqrt[3]{9-x^2}$.

Вираз $\sqrt[3]{(3-x)^2}\ge 0$ при всіх $x\in R$.

Поділимо нерівність на цей вираз.

1) $\sqrt[3]{(3-x)^2}=0$, тобто x=3. x=3 задовольняє дану нерівність, бо $\sqrt[3]{36}>0$;

2) $\sqrt[3]{(3-x)^2}>0$. Тоді $\dfrac{\sqrt[3]{(3+x)^2}}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}+4-5\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3+x}{3-x}}>0$.

Нехай $\sqrt[3]{\dfrac{3+x}{3-x}}=t$, тоді $t^2-5t+4>0,$ тобто $t\in(-\infty;1)\cup(4;\infty)$.

Враховуючи заміну, одержимо:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{\dfrac{3+x}{3-x}}<1,\\ \sqrt[3]{\dfrac{3+x}{3-x}}>4;\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\dfrac{2x}{x-3}>0,\\ \dfrac{65x-189}{x-3}<0.\end{array}\right.$$

Звідси $x\in(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{189}{65};3\right)\cup(3;\infty)$.

Врахувавши випадки 1) і 2) одержимо $x\in(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{189}{65};\infty\right)$

Відповідь. $(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{189}{65};\infty\right)$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$.

Нехай $t=\sqrt{3x^2+5x+2}$, тоді:

$$\sqrt{t+5}-\sqrt{t}>1;$$
$$\sqrt{t+5}>1+\sqrt{t};$$
$$t+5>1+2\sqrt{t}+t;$$
$$-2\sqrt{t}>-4;$$
$$\sqrt{t}<2;$$
$$0\le t<4.$$

Повертаємось до заміни:

$$\begin{cases}3x^2+5x+2\ge 0,\\ 3x^2+5x+2<4;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3(x+1)\left(x+\dfrac{2}{3}\right)\ge 0,\\ 3(x+2)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)<0;\end{cases}$$

$x\in(-2;-1]\cup\left[-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Відповідь. $(-2;-1]\cup\left[-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Приклад 6. Розв’язати нерівність $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}\le 2$.

Нехай $y=\sqrt{x+1}\ge 0$, тоді $x=y^2+1$. Нерівність набуває вигляду:

$$\sqrt{y^2-2y+1}+\sqrt{y^2+2y+1}\le 2;$$
$$|y-1|+|y+1|\le 2.$$

1) При $y\ge 1$:

$$y-1+y+1\le 2;$$
$$2y\le 2;$$
$$y\le 1$$

Тобто y=1.

2) При $0\le y<1$:

$$-y+1+y+1\le 2;$$
$$2\le 2;$$

Нерівність правильна при всіх $0\le y<1$.

Повертаємось до змінної х:

$$\sqrt{x-1}=1; \qquad \text{або} \qquad 0\le\sqrt{x-1}<1;$$
$$x=2. \qquad\qquad 0\le x-1<1;$$
$$0\le x<2.$$

Отже, $x\in[0;2]$.

Відповідь. $[0;2]$.

Приклади, які можуть бути використані для організації самостійної роботи учнів.

Розв’язати нерівність:

1. $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}\ge 3.$

   Відповідь. $\left[6\frac{1}{4};\infty\right).$

2. $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}\ge 1.$

   Відповідь. $[-1;0].$

3. $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}\ge 2.$

   Відповідь. $[-1;\infty).$

4. $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}>\frac{3}{2}.$

   Відповідь. $\left(1;\frac{5}{3}\right).$

5. $\frac{6x}{x-2}-\sqrt{\frac{12}{x-2}}-2\cdot\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}>0.$

   Відповідь. $(2;8).$

6. $\frac{2x+1}{x}-2\sqrt{\frac{2x+1}{x}}\ge 3.$

   Відповідь. $\left(0;\frac{1}{7}\right].$

7. $\frac{x}{2-x}-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{x}{2-x}}\le\frac{1}{4}.$

Відповідь. $[0;1]$.

8. $\sqrt{5x^2+10x+1}\ge 7-x^2-2x.$ (Заміна: $x^2+2x=t$.)

Відповідь. $(-\infty;-3]\cup[1;\infty)$.

Урок 18-20

Тема. Ірраціональні нерівності з параметрами.

Мета. Формувати навички і вміння розв'язувати ірраціональні нерівності з параметрами, використовуючи різні способи, в тому числі геометричну інтерпретацію.

Короткі теоретичні відомості

Змінні a, b, c, …, k, …, які при розв'язуванні нерівності вважаються сталими, називаються параметрами, а нерівність називається нерівністю з параметрами.

Умовились параметри позначати першими літерами латинського алфавіту: a, b, c, d, …, k, l, m, а невідомі – літерами x, y, z.

Для розбиття множини значень параметра на підмножини зручно скористатись тими значеннями параметра, при яких чи при переході через які проходять суттєві зміни нерівності. Такі значення параметра називають контрольними.

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+a} \geq x+1$.

1) $\begin{cases} x+a<0, \\ x+a \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-1, \\ x \geq -a. \end{cases}$

Звідси випливає, якщо $a>1$, то $x \in [-a;-1)$, якщо $a \leq 1$, то $x \in \varnothing$.

2) $\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ x+a \geq x^2+2x+1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ x^2+x+1-a \leq 0. \end{cases}$

Дискримінант квадратного тричлена $x^2+x+1-a$:

$$D=1-4(1-a)=4a-3.$$

Якщо $a<\frac{3}{4}$, то $x \in \varnothing$.

Якщо $a \geq \frac{3}{4}$, то $x \in \left[\frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2};\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}\right]$.

Якщо $x \geq -1$, то потрібно розв'язати сукупність таких двох систем нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a \ge \dfrac{3}{4}, \\ -1 \le \dfrac{-1-\sqrt{4a-3}}{2}; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{3}{4} \le a \le 1, \\ \begin{cases} a \ge \dfrac{3}{4}, \\ -1 > \dfrac{-1-\sqrt{4a-3}}{2}; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a > 1. \end{array}\right.$$

Відповідь. Якщо $a < \dfrac{3}{4}$, то $x \in \varnothing$;

якщо $\dfrac{3}{4} \le a \le 1$, то $x \in \left[\dfrac{-1-\sqrt{4a-3}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}\right]$;

якщо $a > 1$, то $x \in \left[-1; \dfrac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}\right]$.

Приклад 2. Розв’язати нерівність $x - \sqrt{a-2x} < 0$.

1) $a = 0$, то $x - \sqrt{-2x} < 0$, $x < \sqrt{-2x}$.

Область визначення в цьому випадку $x \le 0$. При всіх $x < 0$ нерівність виконується.

2) $a < 0$.

Область визначення:

$$a - 2x \ge 0,$$
$$a \ge 2x,$$
$$x \le \frac{a}{2} < 0.$$

Тоді нерівність $x < \sqrt{a-2x}$ виконується для всіх $x \le \dfrac{a}{2}$, бо її ліва частина від’ємна, а права – невід’ємна.

3) $a > 0$.

а) якщо $x \le 0$, то нерівність $x < \sqrt{a-2x}$ виконується;

б) якщо $0 < x \le \dfrac{a}{2}$, то $x^2 < 2x - a$, тобто $x^2 + 2x - a < 0$.

Отже,

$$\begin{cases} 0 < x \le \dfrac{a}{2}, \\ -1-\sqrt{1+a} < x < -1+\sqrt{1+a}; \end{cases}$$

Значить, $0 < x < -1+\sqrt{a+1}$.

Відповідь: $a = 0,$ то $x \in (-\infty;0);$

$a < 0,$ то $x \in \left(-\infty;\dfrac{a}{2}\right);$

$a > 0,$ то $x \in \left(-\infty;-1+\sqrt{a+1}\right).$

Приклад 3. Розв'язати нерівність $x+4a \ge 5\sqrt{ax}$.

$ax \ge 0$, тобто а і х – одного знака.

Якщо $x+4a < 0$, то нерівність розв'язків не має.

Нехай $x+4a \ge 0$, то $a \ge 0$ і $x \ge 0$.

Якщо а=0, то $x \ge 0$.

Якщо $a > 0$ ($x \ge 0$), то $x^2+8ax+16a^2 \ge 25ax$, тобто $x^2-17ax+16a^2 \ge 0$.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le a, \\ x \ge 16a; \end{array}\right. \\ x \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le x \le a, \\ x \ge 16a. \end{array}\right.$$

Відповідь. Якщо $a \ge 0$, то $x \in [0;a] \cup [16a;\infty)$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x} > a$.

Область визначення:

$$\begin{cases} a+x \ge 0, \\ a-x \ge 0; \end{cases}$$

$$2a \ge 0;$$

$$a \ge 0.$$

При цій умові одержуємо $\begin{cases} x \le a, \\ x \ge -a. \end{cases}$, тобто $-a \le x \le a$, $|x| \le a$.

Розглянемо $a \ge 0$ і $|x| \le a$.

При вказаних а і х можна піднести дану нерівність до квадрата.

$$a+x+a-x+2\sqrt{a^2-x^2} > a^2,$$

$$2\sqrt{a^2-x^2} > a^2-2a \qquad (1)$$

Розглянемо два випадки:

1) $a^2-2a<0$, тобто $0<a<2$.

При таких значеннях а нерівність $2\sqrt{a^2-x^2}>a^2-2a$ виконується для всіх х з області визначення ($|x|\le a$).

2) $a^2-2a\ge 0$.

$$a^2-2a\ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=0, \\ a\ge 2; \end{array}\right. \\ a\ge 0; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a=0, \\ a\ge 2. \end{array}\right.$$

Якщо а=0, то допустимим є лише х=0. при таких значеннях а і х нерівність (1) не виконується.

Якщо $a\ge 2$, то $4\left(a^2-x^2\right)>a^4-4a^3+4a^2$,

$$4a^2-4x^2>a^4-4a^3+4a^2,$$

$$x^2<\frac{4a^3-a^4}{4}, \text{ тобто } |x|<\frac{a}{2}\sqrt{4a-a^2}.$$

При цьому $4a-a^2\ge 0$, тобто $2\le a\le 4$, бо $a\ge 2$. $a\ne 4$, бо нерівність строга ($|x|<\frac{a}{2}\sqrt{4a-a^2}$).

Перевіряємо, чи належить х області визначення $|x|\le a$:

$$\frac{a}{2}\sqrt{4a-a^2}\le a, (2\le a<4) \Leftrightarrow \sqrt{4a-a^2}\le 2 \Leftrightarrow 4a-a^2\le 4 \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow$$

$a^2-4a+4=\left(a-2\right)^2\ge 0$, тобто всі знайдені х входять в область визначення.

Відповідь. Якщо $0<a<2$, то $x\in\left[-a;a\right]$;

якщо $2\le a\le 4$, то $x\in\left(-\frac{a}{2}\sqrt{4a-a^2};\frac{a}{2}\sqrt{4a-a^2}\right)$;

якщо $a\ge 4$ і $a\le 0$, то $x\in\varnothing$.

Приклад 5. Розв’язати нерівність $\left(a+1\right)\sqrt{2-x}<1$.

Область визначення $2-x\ge 0$, то $x\le 2$.

1) $a+1=0$,

$a=-1$.

Нерівність правильна при будь-якому х з області визначення.

2) $a < -1$.

Нерівність правильна при будь-якому х з області визначення.

3) $a > -1$, то:

$$(a+1)^2(2-x) < 1;$$
$$2(a+1)^2 - (a+1)^2 x < 1;$$
$$x > \frac{2(a+1)^2}{(a+1)^2} - \frac{1}{(a+1)^2};$$
$$x > 2 - \frac{1}{(a+1)^2}.$$

Але $x \le 2$, тому $2 - \frac{1}{(a+1)^2} < x \le 2$.

Відповідь. При $a \le -1$ $x \in (-\infty; 2]$; при $a > -1$ $x \in \left(2 - \frac{1}{(a+1)^2}; 2\right]$.

Приклад 6. Розв'язати нерівність $a\sqrt{x+1} < 1$.

Область визначення: $x + 1 \ge 0$, тобто $x \ge -1$.

1) a=0, то нерівність правильна при будь-якому х з області визначення.

2) $a < 0$, то $\sqrt{x+1} > \frac{1}{a}$, де $\frac{1}{a} < 0$ при будь-якому х з області визначення.

3) $a > 0$, то $a^2(x+1) < 1$,

$$a^2 x + a^2 < 1,$$
$$a^2 x < 1 - a^2,$$
$$x < \frac{1-a^2}{a^2},$$

Але $x \ge 1$, то $-1 \le x < \frac{1-a^2}{a^2}$.

Відповідь. При $a \in (-\infty; 0]$, $x \in [-1; \infty)$, при $a \in (0; \infty)$ $x \in \left[-1; \frac{1-a^2}{a^2}\right)$.

Приклад 7. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a} > \sqrt{2x}$.

В лівій і правій частинах нерівності знаходяться невід'ємні вирази. Тому враховуючи область визначення можна піднести ліву і праву частини нерівності до квадрата.

$$\begin{cases} x+a\ge 0, \\ x-a\ge 0, \\ 2x\ge 0, \\ x+a+2\sqrt{x^2-a^2}+x-a>2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -a, \\ x\ge a, \\ x\ge 0, \\ 2\sqrt{x^2-a^2}>0; \end{cases}$$

Остання нерівність виконується при всіх $x\neq \pm a$ з області визначення, тому:

$$\begin{cases} x>-a, \\ x>a, \\ x\ge 0. \end{cases}$$

Порівняємо числа а, -а, 0.

1) При $a\ge 0$ $x\in(a;\infty)$
2) При $a<0$ $x\in(-a;\infty)$

$$\sqrt{x-1}<a.$$

Область визначення: $x\ge 1$.

1) При $a\le 0$ розв'язків немає.
2) При $a>0$: $x-1<a^2$; $x<1+a^2$, але $x\ge 1$

Відповідь. При $a\le 0$ $x\in\varnothing$; при $a>0$ $x\in[1;1+a^2)$.

Приклад 8. Розв'язати нерівність $\sqrt{a^2+x^2}>x+a-1$.

1) При будь-якому значенні а, якщо $x+a-1<0$, тобто $x<a-1$, задана нерівність правильна.
2) При $x\ge 1-a$: $a^2+x^2>a^2+x^2+1+2xa-2a-2x$, тому:

$$\begin{cases} x\ge 1-a, \\ x(2-2a)>1-2a; \end{cases} \quad (1), \quad x<\frac{2a-1}{2a-2}.$$

Розглянемо можливі випадки:

а) $a>1$, то $1-a\le x<\dfrac{2a-1}{2a-2}$. Об'єднуючи з множиною $x<a-1$, одержимо $x<\dfrac{2a-1}{2a-2}$.

б) а=1, $x\ge 0$ – розв'язок системи (1). Об'єднуючи з множиною $x<a-1$, (а=1) знаходимо: х – будь-яке число.

в) $a<0$. Розв'язок системи (1) $x\ge 1-a$. Приєднавши $x<a-1$, маємо: x – будь-яке число.

Відповідь. Якщо $a>1$, то $x\in\left(-\infty;\frac{2a-1}{2a-2}\right)$, якщо $a\le 1$ то $x\in(-\infty;\infty)$.

Приклад 9. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{(x-a)^2}+\sqrt[3]{x^2-a^2}<\sqrt[3]{a^2}$.

Нехай x_0 – розв'язок нерівності. Тоді нерівність $\sqrt[3]{(x_0+a)^2}+\sqrt[3]{(x_0-a)^2}+\sqrt[3]{{x_0}^2-a^2}<\sqrt[3]{a^2}$ буде правильною.

Якщо замінити а на –а ця нерівність перейде сама в себе.

Отже, якщо x_0 є розв'язком нерівності для $a\ge 0$, то x_0 – розв'язок нерівності і для $a\le 0$.

Тому розв'яжемо дану нерівність для $a\ge 0$.

1) $a=0$, то $3\sqrt[3]{x^2}<0$, значить $x\in\varnothing$.

2) $a>0$, то $\sqrt[3]{(x+a)^2}>\sqrt[3]{(x-a)^2}$.

Домножимо обидві частини даної нерівності на додатній вираз $\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x-a}$:

$$(x+a)-(x-a)<\sqrt[3]{a^2}\left(\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x-a}\right);$$

$$\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x-a}>2\sqrt[3]{a^2};$$

$$\sqrt[3]{x+a}>2\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{x-a}.$$

Піднесемо ліву і праву частини нерівності до куба:

$$x+a>8a+x-a+3\cdot 4\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{x-a}+3\cdot 2\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{(x-a)^2}.$$

Нехай $\sqrt[3]{x-a}=y$. Тоді:

$$6\sqrt[3]{a}y^2+12\sqrt[3]{a^2}y+6a<0;$$
$$y^2+2\sqrt[3]{a}y+\sqrt[3]{a^2}<0;$$
$$\left(y+\sqrt[3]{a}\right)^2<0,$$
$$y\in\varnothing, \text{то } x\in\varnothing.$$

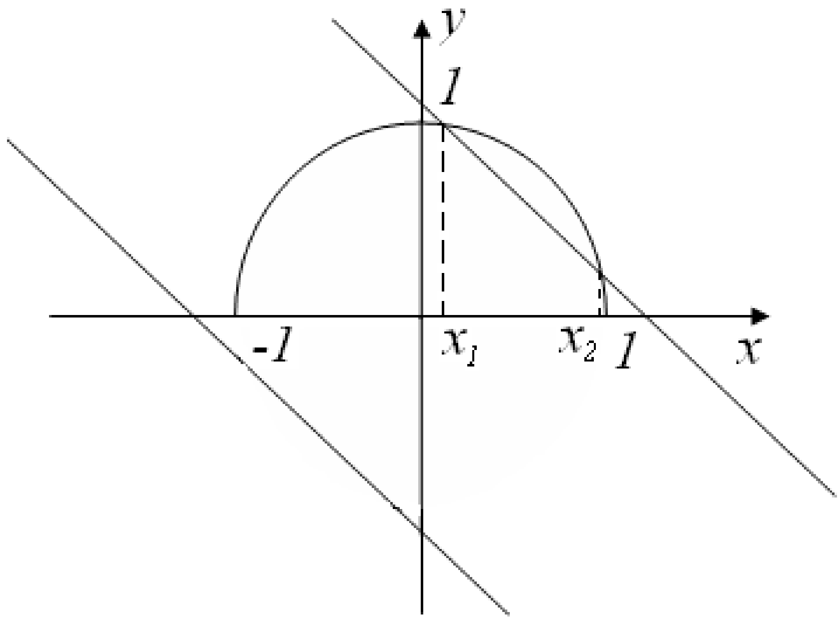
Отже, при $a\ge 0$ $x\in\varnothing$.

Поширивши знайдений розв'язок на випадок $a\le 0$ одержимо, дана нерівність взагалі не має розв'язків.

Відповідь. Нерівність розв’язків не має.

Приклад 10. Розв’язати нерівність $\sqrt{1-x^2} > a - x.$

Побудуємо графіки функцій $y=\sqrt{1-x^2}$ і $y=a-x.$



Область визначення: $x\in[-1;1]$. Якщо $x<a$, то:

$$1-x^2 > a^2-2ax+x^2;$$
$$2x^2-2ax+a^2-1<0;$$
$$\frac{D}{4}=a^2-2a^2+2=2-a^2;$$
$$-\sqrt{2}\le a\le\sqrt{2};$$
$$x_1=\frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2};x_2=\frac{a+\sqrt{2-a^2}}{2}.$$

Якщо $a=\sqrt{2}$, то пряма $y=a-x$ дотикається до півкола.

Відповідь. Якщо $a<-1$, то $x\in[-1;1]$;

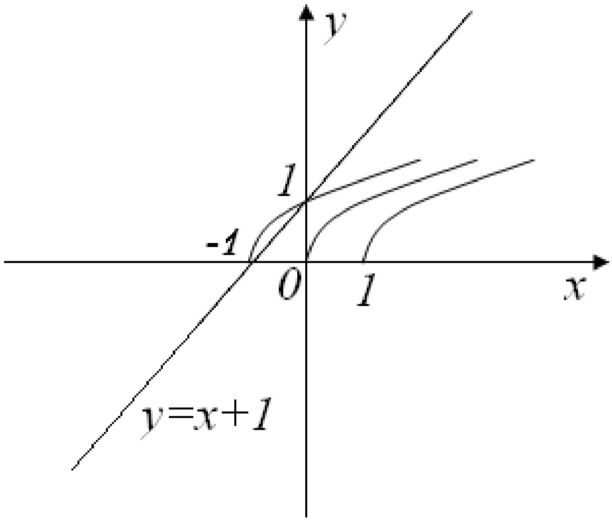
якщо $-1\le a<1$, то $x\in\left(\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{2-a^2}\right);1\right)$;

якщо $1\le a<\sqrt{2}$, то $x\in\left(\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{2-a^2}\right);\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{2-a^2}\right)\right)$;

якщо $a\ge\sqrt{2}$, то $x\in\varnothing$.

Приклад 11. Розв’язати нерівність $\sqrt{x+a}>x+1.$

Побудуємо графіки функцій $y=\sqrt{x+a}$ і $y=x+1$.



Якщо $x+1>0$, тобто $x>-1$, то:

$$x+a>x^2+2x+1;$$

$$x^2+x+1-a<0;$$

$$D=1-4(1-a)=4a-3\geq 0, a\geq \frac{3}{4};$$

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2}; x_2=\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$$

x_1, x_2 – точки перетину графіків.

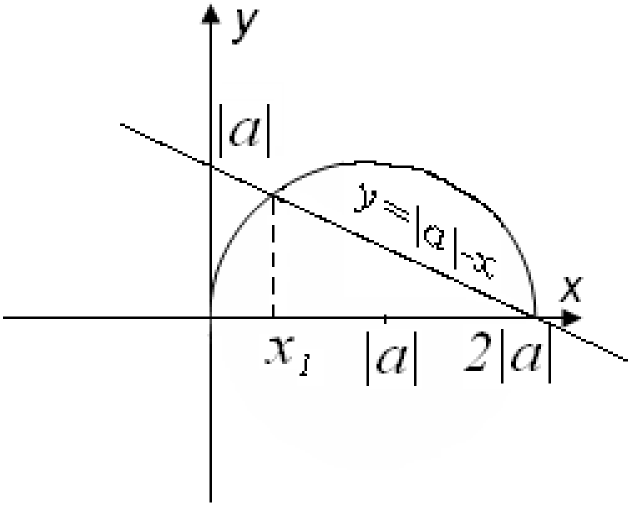
Відповідь. Якщо $a\leq \frac{3}{4}$, то $x\in\varnothing$;

якщо $\frac{3}{4}<a\leq 1$, то $x\in\left(\frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2};\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}\right)$;

якщо $a>1$, то $x\in\left[-a;\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}\right)$.

Приклад 12. Розв'язати нерівність $\sqrt{2|a|x-x^2}\geq |a|-x$.

Побудуємо графіки функцій $y=\sqrt{2|a|x-x^2}=\sqrt{a^2-\left(x-|a|\right)^2}$ - це півколо $(y\geq 0)$ радіуса $|a|$ $\left(\left(x-|a|\right)^2+y^2=a^2\right)$ з центром $\left(|a|;0\right)$ та $y=|a|-x$.



Якщо $|a| - x \geq 0$, тобто $x \leq |a|$, то:

$$2|a|x - x^2 \geq |a|^2 - 2|a|x + x^2;$$

$$2x^2 - 4|a| + |a|^2 \leq 0;$$

$$\frac{D}{4} = 4|a|^2 - 2|a|^2 = 2|a|^2;$$

$$x_1 = \frac{2|a| - |a|\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь. Якщо $a = 0$, то $x = 0$; якщо $a \neq 0$, то $x \in \left[\frac{2|a| - |a|\sqrt{2}}{2}; 2|a|\right]$.

Приклади, які можуть бути використані для організації самостійної роботи учнів.

Розв'язати нерівність:

1. $\sqrt{x+1} \geq a.$ Відповідь. Якщо $a > 0$, то $x \in [a^2 - 1; \infty)$; якщо $a \leq 0$, то $x \in [-1; \infty)$.

2. $2\sqrt{x+a} > x+1.$ Відповідь. Якщо $a \leq 0$, то $x \in \varnothing$; якщо $0 < a \leq 1$, то $x \in (1 - 2\sqrt{a}; 1 + 2\sqrt{a})$; якщо $a > 1$, то $x \in [-1; 1 + 2\sqrt{a})$.

3. $\sqrt{x+a} > a+\sqrt{x}.$ Відповідь. Якщо $a<-1$, то $x\in[-a;\infty)$;

якщо $-1\le a<0$, то $x\in\left(\frac{(1-a)^2}{2};\infty\right)$;

якщо а=0, то $x\in\varnothing$;

якщо $0<a<1$, $x\in\left[0;\frac{(1-a)^2}{2}\right)$;

якщо $a\ge 1$, то $x\in\varnothing$.

4. $x-a>\sqrt{x+a^2}.$ Відповідь. Якщо $a\le -1$, то $x\in(0;\infty)$; якщо

$-1<a\le -\frac{1}{2}$, то $x\in[-a^2;2a+1)\cup(0;\infty)$;

якщо $-\frac{1}{2}<a<0$, то

$x\in[-a^2;0)\cup(2a+1;\infty)$; якщо $a\ge 0$, то

$x\in(2a+1;\infty)$.

5. $\sqrt{\frac{3x-1}{a-2}}<1.$ Відповідь. При а=2 $x\in\varnothing$; при $a>2$ $x\in\left[\frac{1}{3};\frac{a-1}{3}\right)$;

при $a<2$ $x\in\left(\frac{a-1}{3};\frac{1}{3}\right]$.

6. $\sqrt{2ax-x^2}\ge a-x.$ Відповідь. Якщо $a<0$, то $x\in\left[a\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right);0\right]$; якщо

$a\ge 0$, то $x\in\left[a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right);2a\right]$.

7. $a\sqrt{x+1}<1.$ Відповідь. Якщо $a\le 0$, то $x\in[-1;\infty)$; якщо $a>0$, то

$x\in\left[-1;\frac{1}{a^2}-1\right)$.

8. $(a+1)\sqrt{2-x}<1.$ Відповідь. Якщо $a\le -1$, то $x\in(-\infty;2]$; якщо $a>-1$,

то $x\in\left(2-\frac{1}{(a+1)^2};2\right]$.

Література

1. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике.// М. Просвещение. – 1991.
2. Гайштун О.Г., Литвиненко Г.М. Розв'язування алгебраїчних задач.// К. «Радянська школа». – 1991.
3. Горделадзе Ш.Г., Кухарчук М.М., Яремчик Ф.П. Збірник конкурсних задач з математики. // К. «Вища школа». – 1998.
4. Вірченко Н.О., Ляшко І.І., Шведов К.І. Графіки. Функції. // К. «Наукова думка». – 1977.
5. Завало С.Т. Практикум з розв'язування задач.// К. «Вища школа». – 1975.
6. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самійленко А.М. Збірник задач з математики. // К. «Либідь». – 1993.
7. Ястребинецький Г.А. Задачи с параметрами.// М. «Просвещение». – 1986.
8. Тимошенко О.І. Деякі методи розв'язування ірраціональних нерівностей. Математика а школі.// К. «Педагогічна преса». – с.16-22.